Guida Pratica
per Esercizi di Analisi Matematica

Indice

1 Quick Reference delle Funzioni

1.1 Funzioni elementari e loro proprietà

Funzioni algebriche

Potenza:	$f(x) = x^n$	$D = \mathbb{R}$ se $n \in \mathbb{N}$
		$D = \mathbb{R}^+$ se $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
Radice:	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D = \mathbb{R}^+$ se n pari
		$D = \mathbb{R}$ se n dispari
Razionale:	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$

Funzioni trascendenti

Esponenziale:	$f(x) = a^x$	$D = \mathbb{R},\ I = \mathbb{R}^+$
Logaritmo:	$f(x) = \log_a(x)$	$D = \mathbb{R}^+,\ I = \mathbb{R}$
Esp. naturale:	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$D = \mathbb{R},\ I = \mathbb{R}^+$
Log. naturale:	$f(x) = \ln(x)$	$D = \mathbb{R}^+,\ I = \mathbb{R}$

Funzioni trigonometriche

Seno:	$\operatorname{sen}(x)$	$D = \mathbb{R},\ I = [-1, 1]$
Coseno:	$\cos(x)$	$D = \mathbb{R},\ I = [-1, 1]$
Tangente:	$\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}\ \ I$
Cotangente:	$\operatorname{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ I = \mathbb{R}$

Funzioni trigonometriche inverse

Arcoseno:	(x)	$D = [-1, 1],\ I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
Arcocoseno:	$\arccos(x)$	$D = [-1, 1],\ I = [0, \pi]$
Arcotangente:	$\operatorname{arctg}(x)$	$D = \mathbb{R},\ I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
Arcocotangente:	$\operatorname{arccotg}(x)$	$D = \mathbb{R},\ I = (0, \pi)$

Funzioni iperboliche

Seno iperbolico:	$\sinh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$D = \mathbb{R},\ I = \mathbb{R}$
Coseno iperbolico:	$\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$D = \mathbb{R},\ I = [1, +\infty$
Tangente iperbolica:	$\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$D = \mathbb{R},\ I = (-1, 1)$

Funzioni iperboliche inverse

Arcoseno iperbolico:	$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$D =$
Arcocoseno iperbolico:	$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$D =$
Arcotangente iperbolica:	$\operatorname{arctanh}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$D =$

1.2 Proprietà fondamentali delle funzioni

Proprietà delle potenze

$$a^0 = 1 \text{ per } a \neq 0$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$
$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Proprietà dei logaritmi

$$
\begin{aligned}
&\log_a(1) = 0\\
&\log_a(a) = 1\\
&\log_a(a^n) = n\\
&\log_a(m \cdot n) = \log_a(m) + \log_a(n)\\
&\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)\\
&\log_a(m^n) = n \cdot \log_a(m)\\
&\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}
\end{aligned}
$$

Formule trigonometriche

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\\
&\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\\
&\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\\
&\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\mathrm{sen}(y)\\
&\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)\\
&\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}(x) \pm \mathrm{tg}(y)}{1 \mp \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}\\
&\mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen}(x)\cos(x)\\
&\cos(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2(x)\\
&\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\mathrm{tg}(x)}{1 - \mathrm{tg}^2(x)}
\end{aligned}
$$

Formule di bisezione

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\\
&\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}\\
&\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(y) = 2\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&\cos(x) - \cos(y) = -2\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

2 Limiti

2.1 Limiti notevoli

Limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \text{per } \alpha > 0$$

2.2 Tecniche per il calcolo dei limiti

Forme indeterminate

Forma indeterminata	Esempi	Strategia
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$	Raccogliere, fattorizzare, limiti notevoli
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x}{2x^2-1}$	Dividere per la potenza più alta
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$	Trasformare in $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$	Razionalizzare o denominatore comune
0^0, 1^∞, ∞^0	$\lim_{x\to 0^+} x^x$	Passare ai logaritmi (es: $\mathrm{e}^{\ln(x^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$)

Procedura generale

1. **Sostituzione diretta**: prova prima a sostituire il valore a cui tende la variabile.
2. **Identificare la forma indeterminata**: se ottieni una forma indeterminata, identifica quale tipo è.
3. **Manipolazione algebrica**:
   - Semplificare frazioni (raccogliere, fattorizzare, razionalizzare)
   - Applicare i limiti notevoli
   - Per $\frac{\infty}{\infty}$: dividere numeratore e denominatore per la potenza più alta
   - Per forma 1^∞: usare $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}$
4. **Teorema di de l'Hôpital**: per forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, derivare numeratore e denominatore.
5. **Sviluppi di Taylor**: utili per forme $0/0$ quando altri metodi sono complicati.

Esempio 1: Forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor di e^x:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \\
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esempio 2: Forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \\
&= \frac{3 + 0 + 0}{5 - 0 + 0} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Esempio 3: Forma 1^∞

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

Analizziamo l'esponente:

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Applicando de l'Hôpital o il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ con $t = \frac{2}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \\
&= 2 \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 2 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

3 Derivate

3.1 Derivate fondamentali

Tabella delle derivate fondamentali

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	(costante)
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	(identità)
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	(potenza con $n \in \mathbb{R}$)
$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$	(esponenziale naturale)
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$	(esponenziale con base $a > 0$)
$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$	(logaritmo naturale)
$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln(a)}$	(logaritmo in base $a > 0$)
$\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x)) = \cos(x)$	(seno)
$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\mathrm{sen}(x)$	(coseno)
$\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$	(tangente)
$\frac{d}{dx}(\mathrm{cotg}(x)) = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} = -(1 + \mathrm{cotg}^2(x))$	(cotangente)
$\frac{d}{dx}((x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arcoseno)
$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arcocoseno)
$\frac{d}{dx}(\mathrm{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$	(arcotangente)
$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$	(seno iperbolico)
$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$	(coseno iperbolico)
$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	(tangente iperbolica)

3.2 Regole di derivazione

Regole di derivazione

$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$	(somma e differenza)
$\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$	(prodotto per costante)
$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	(prodotto)
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	(quoziente)
$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	(composizione)
$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	(funzione inversa)

Esempi di calcolo delle derivate

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x) \qquad \text{(prodotto)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2x\ln(x)}{x^3} \qquad \text{(quoziente)}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(\cos(x))) = \frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\mathrm{sen}(x)) = -\mathrm{tg}(x) \qquad \text{(composizione)}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2}\cdot 2x = 2xe^{x^2} \qquad \text{(composizione)}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}^2(x)) = 2\mathrm{sen}(x)\cdot\cos(x) = \mathrm{sen}(2x) \qquad \text{(composizione)}$$

4 Sviluppi in Serie di Taylor/MacLaurin

4.1 Sviluppi fondamentali

Sviluppi di Taylor in x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \text{per } |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{per } |x|<1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{per } |x|<1$$

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{per } |x|\le 1$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4.2 Come calcolare lo sviluppo di Taylor

Metodo diretto

Per calcolare lo sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$ centrato in $x=a$ fino all'ordine n:

1. Calcola le derivate successive: $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
2. Valuta le derivate nel punto a: $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$
3. Applica la formula:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Sviluppi mediante manipolazione

1. **Sostituzione**: per $f(g(x))$, sostituisci $g(x)$ nello sviluppo di $f(y)$.
2. **Prodotto**: moltiplica gli sviluppi di $f(x)$ e $g(x)$.
3. **Quoziente**: dividi gli sviluppi (metodo della divisione lunga).
4. **Composizione**: per funzioni composte complesse, usa tecniche algebriche.

Esempio: Calcolo dello sviluppo di $\ln(1+\sin(x))$

Conosciamo gli sviluppi:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + o(y^5)$$

Sostituiamo $y = \sin(x)$:

$$\ln(1+\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^4(x)}{4} + \frac{\sin^5(x)}{5} + o(x^5)$$

Sostituiamo lo sviluppo di $\sin(x)$ e calcoliamo le potenze:

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= x^2 + o(x^3)\\
\sin^3(x) &= x^3 + o(x^4)\\
\sin^4(x) &= x^4 + o(x^5)\\
\sin^5(x) &= x^5 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^4)}{3} - \frac{x^4 + o(x^5)}{4} + o(x^5)\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{4} + o(x^5)
\end{aligned}$$

5 Integrali

5.1 Integrali fondamentali

Integrali immediati

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$$
$$\int \text{tg}(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$$
$$\int \text{cotg}(x) dx = \ln|\text{sen}(x)| + C$$
$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \text{tg}(x)| + C$$
$$\int \text{cosec}(x) dx = \ln|\text{cosec}(x) - \text{cotg}(x)| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (x) + C$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}(x) + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left(\frac{x}{a}\right) + C$$

5.2 Metodi di integrazione

Integrazione per sostituzione

Per calcolare $\int f(g(x))g'(x)dx$:

1. Poni $t = g(x)$, da cui $dt = g'(x)dx$
2. Riscrivi l'integrale come $\int f(t)dt$
3. Calcola l'integrale rispetto a t
4. Sostituisci $t = g(x)$ nel risultato

Esempio: $\int x\cos(x^2)dx$

$$\text{Poniamo } t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$
$$\int x\cos(x^2)dx = \int \cos(t)\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos(t)dt = \frac{1}{2}\text{sen}(t) + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2) + C$$

Integrazione per parti

Formula: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$
Strategia:

1. Scegli $u(x)$ e $v'(x)$ in modo che $\int v(x)u'(x)dx$ sia più semplice dell'integrale originale
2. In generale, scegli $u(x)$ come la funzione che diventa più semplice quando derivata

Esempio: $\int xe^x dx$

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Suggerimenti per la scelta di u (in ordine di priorità):

- Funzioni polinomiali
- Funzioni logaritmiche
- Funzioni trigonometriche inverse
- Funzioni trigonometriche
- Funzioni esponenziali

Integrazione di funzioni razionali

Per integrare $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi:

1. Se $\deg(P) \geq \deg(Q)$, dividi P per Q per ottenere $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$
2. Scomponi $\frac{R(x)}{Q(x)}$ in frazioni parziali
3. Integra ogni frazione parziale separatamente

Esempio: $\int \frac{2x+1}{x^2-1}dx$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2-1} &= \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ 2x+1 &= A(x+1) + B(x-1) \\ \text{Per } x = 1 &: 3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ \text{Per } x = -1 &: -1 = -2B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \\ \int \frac{2x+1}{x^2-1}dx &= \int \left(\frac{3/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \ln|x-1|^{3/2} \cdot |x+1|^{1/2} + C \end{aligned}$$

Integrazione di funzioni trigonometriche

1. **Prodotti di seni e coseni:** Usa le formule di bisezione

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$$
$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)]$$
$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]$$

2. **Potenze di seni e coseni:**

   - Per $\int \sin^n(x)dx$ e $\int \cos^n(x)dx$ con n dispari, isola un fattore e usa sostituzioni
   - Per $\int \sin^n(x)dx$ e $\int \cos^n(x)dx$ con n pari, usa le formule di bisezione:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

3. **Funzioni razionali in $\sin(x)$ e $\cos(x)$:** Usa la sostituzione $t = \mathrm{tg}(x/2)$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Esempio: $\int \sin^2(x)dx$

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

5.3 Integrali impropri

Integrali impropri

1. **Integrale improprio di prima specie** (intervallo illimitato):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

2. **Integrale improprio di seconda specie** (funzione non limitata): Se f ha una singolarità in $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Criterio del confronto: Se $0 \le f(x) \le g(x)$ per $x \ge a$:

- Se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge
- Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, allora $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge

Integrali di riferimento:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge sse } p > 1$$
$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^p} \text{ converge sse } p < 1$$

Esempio: Integrale improprio

Studiare la convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x\ln^2(x)}$$

Poniamo $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = x\,dt$. Quando $x = 1$, $t = 0$; quando $x = b$, $t = \ln(b)$.

$$\int_1^{b} \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \int_0^{\ln(b)} \frac{x\,dt}{x\ln^2(x)} = \int_0^{\ln(b)} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_0^{\ln(b)} = -\frac{1}{\ln(b)} - \left(-\frac{1}{0}\right)$$

Il termine $-\frac{1}{0}$ indica che l'integrale diverge in 0, quindi l'integrale improprio è divergente.

6 Serie

6.1 Criteri di convergenza

Criteri per serie a termini positivi

Criterio	Condizione di convergenza
Necessario	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (ma non sufficiente)
Serie geometrica	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge sse $\lvert q\rvert < 1$ (a $\frac{1}{1-q}$)
Serie armonica	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sse $p > 1$
Rapporto	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$
Radice	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$
Confronto	Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge
Confronto asintotico	Se $a_n \sim cb_n$ (stesso comportamento asintotico), allora le serie hanno lo stesso carattere
Criterio integrale	Se $f(n) = a_n$ è decrescente, $\sum a_n$ converge sse $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge

Criteri per serie a termini di segno variabile

Criterio	Condizione
Convergenza assoluta	Se $\sum \lvert a_n\rvert$ converge, allora $\sum a_n$ converge
Leibniz (serie alternata)	Se $a_n > 0$, $a_n \searrow 0$, allora $\sum(-1)^n a_n$ converge

Esempio: Studio di convergenza

Studiare la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$
Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3\cdot n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n^2}\right) = \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

Poiché il limite del rapporto è $\frac{1}{3} < 1$, la serie converge.

7 Equazioni Differenziali

7.1 Equazioni differenziali del primo ordine

Equazioni a variabili separabili

Equazione nella forma: $y' = g(x) \cdot h(y)$
Procedura:

1. Riscrivere come $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$
2. Riorganizzare come $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$
3. Integrare entrambi i lati: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C$

Esempio: $y' = xy^2$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy^2 \\
\frac{dy}{y^2} &= x\,dx \\
\int \frac{dy}{y^2} &= \int x\,dx + C \\
-\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + C \\
y &= -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C} = \frac{-2}{x^2 + 2C}
\end{aligned}$$

Equazioni lineari del primo ordine

Equazione nella forma: $y' + P(x)y = Q(x)$
Procedura (metodo del fattore integrante):

1. Calcola il fattore integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$
2. Moltiplica l'equazione per $\mu(x)$: $\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$
3. Riscrivi il lato sinistro come derivata: $\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$
4. Integra entrambi i lati: $\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C$
5. Risolvi per y: $y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right]$

Esempio: $y' + 2y = e^x$

$$\begin{aligned}
P(x) = 2,\ Q(x) &= e^x \\
\mu(x) = e^{\int 2\,dx} &= e^{2x} \\
e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= e^{2x} \cdot e^x = e^{3x} \\
\frac{d}{dx}[e^{2x}y] &= e^{3x} \\
e^{2x}y &= \int e^{3x}\,dx + C = \frac{e^{3x}}{3} + C \\
y &= \frac{1}{e^{2x}}\left[\frac{e^{3x}}{3} + C\right] = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x}
\end{aligned}$$

7.2 Equazioni differenziali del secondo ordine

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Equazione nella forma: $ay'' + by' + cy = 0$ (omogenea)
Procedura:

1. Trova le radici del polinomio caratteristico $ar^2 + br + c = 0$
2. A seconda delle radici r_1 e r_2:
   - Se $r_1 \neq r_2$ entrambe reali: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
   - Se $r_1 = r_2$ (radice doppia): $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
   - Se $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (complesse coniugate): $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

Esempio: $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 4 &= 0 \\ (r-2)^2 &= 0 \\ r_1 = r_2 &= 2 \end{aligned}$$

Radice doppia $r = 2$, quindi la soluzione generale è:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

Equazioni lineari non omogenee

Equazione nella forma: $ay'' + by' + cy = f(x)$
Procedura:

1. Trova la soluzione generale y_c dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$
2. Trova una soluzione particolare y_p dell'equazione completa:
   - Se $f(x) = P_n(x)$ (polinomio): prova $y_p = Q_n(x)$
   - Se $f(x) = e^{\alpha x}$: prova $y_p = Ae^{\alpha x}$
   - Se $f(x) = \sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$: prova $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
   - Se $f(x)$ è una combinazione: somma le soluzioni particolari
3. La soluzione generale è $y = y_c + y_p$

Esempio: $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
Abbiamo già trovato $y_c = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. Poiché $f(x) = 2e^{2x}$ contiene e^{2x} che è soluzione dell'omogenea, proviamo $y_p = Ax^2 e^{2x}$.

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^2 e^{2x} \\ y_p' &= 2Axe^{2x} + 2Ax^2 e^{2x} = 2Ae^{2x}(x + x^2) \\ y_p'' &= 2Ae^{2x}(1 + 2x) + 2Ae^{2x}(2x + 2x^2) = 2Ae^{2x}(1 + 4x + 2x^2) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= 2Ae^{2x}(1 + 4x + 2x^2) - 4 \cdot 2Ae^{2x}(x + x^2) + 4 \cdot Ax^2 e^{2x} \\ &= 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} - 8Axe^{2x} - 8Ax^2 e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} \\ &= 2Ae^{2x} \end{aligned}$$

Quindi $2Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = 1$. La soluzione particolare è $y_p = x^2 e^{2x}$ e la soluzione generale è:

$$y = y_c + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + x^2 e^{2x} = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{2x}$$

8 Consigli pratici e strategie di approccio

Strategie generali

1. **Analisi preliminare**: Identifica il tipo di problema (calcolo limite, studio di funzione, integrazione, ecc.)
2. **Riconoscimento di pattern**: Cerca se il problema può essere ricondotto a casi noti
3. **Scomposizione**: Dividi problemi complessi in parti più semplici
4. **Manipolazione algebrica**: Semplifica le espressioni prima di applicare tecniche specifiche
5. **Verifica**: Controlla la soluzione, anche con metodi alternativi quando possibile

Errori comuni da evitare

- **Errori di segno**: Controlla attentamente i segni nelle manipolazioni algebriche
- **Errori di derivazione/integrazione**: Verifica le formule delle derivate e degli integrali
- **Omissione della costante di integrazione**: Ricorda sempre $+C$ negli integrali indefiniti
- **Definizione incorretta del dominio**: Verifica sempre il dominio delle funzioni
- **Divisione per zero**: Attenzione a espressioni che possono annullarsi al denominatore
- **Semplificazione errata**: Non semplificare prima di sostituire i valori nelle forme indeterminate

Procedura per lo studio di funzione

1. **Dominio**: Determina l'insieme dei valori di x per cui la funzione è definita
2. **Simmetrie**: Verifica se la funzione è pari, dispari o periodica
3. **Intersezioni con gli assi**: Calcola $f(0)$ e risolvi $f(x) = 0$
4. **Segno**: Determina dove $f(x) > 0$ e dove $f(x) < 0$
5. **Limiti agli estremi del dominio**: Calcola il comportamento asintotico
6. **Asintoti**: Verifica l'esistenza di asintoti verticali, orizzontali e obliqui
7. **Derivata prima**: Calcola $f'(x)$, determina punti stazionari e intervalli di crescenza/decrescenza
8. **Derivata seconda**: Calcola $f''(x)$, determina punti di flesso e intervalli di concavità
9. **Grafico**: Combina tutte le informazioni per tracciare il grafico

Procedura per problemi di ottimizzazione

1. **Comprensione del problema**: Identifica la quantità da ottimizzare
2. **Modellizzazione**: Esprimi la quantità da ottimizzare in funzione di una sola variabile
3. **Dominio**: Determina il dominio della funzione nel contesto del problema
4. **Calcolo dei punti critici**: Trova i punti dove la derivata si annulla
5. **Analisi dei punti critici**: Usa la derivata seconda o il test della derivata prima per verificare se si tratta di massimi o minimi
6. **Verifica agli estremi**: Controlla il valore della funzione agli estremi del dominio
7. **Conclusione**: Identifica l'ottimo globale e interpreta il risultato nel contesto del problema